Programme de colle n°25

semaine du 15 au 19 avril

Notions vues en cours

Chapitre 27 : Applications linéaires (partie A) *en complément de la semaine précédente*

- Caractérisations de l'injectivité, de la surjectivité, selon le caractère libre ou générateur de l'image d'une base
- E.v. E et F isomorphes : définition, notation $E \simeq F$, si et seulement si les dimensions de E et F sont finies et égales, dimension de $\mathcal{L}(E, F)$
- Lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension (finie) : équivalence entre injectivité / surjectivité / bijectivité / inversibilité à droite / inversibilité à gauche
- Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire ; rang de $v \circ u$: lorsqu'un des morphismes est de rang fini et l'autre est bijectif, lorsque les deux sont de rang fini
- La restriction de u à un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ et sa corestriction à $\operatorname{Im} u$ est un isomorphisme, théorème du rang

Chapitre 28 : Applications linéaires (partie B)

- Homothétie, projecteur (sur F parallèlement à G avec $F \oplus G = E$) : définition, interprétation géométrique, linéarité, $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$, $G = \operatorname{Ker} p$, caractérisation ($p \circ p = p$)
- Symétrie (par rapport à F parallèlement à G avec $F \oplus G = E$) : définition, interprétation géométrique, linéarité, $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$, $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, caractérisation ($s \circ s = \mathrm{id}_E$)
- Forme linéaire, espace dual, notation E^*, $\dim E^* = \dim E$, base duale
- Hyperplan (vectoriel) H de E : définition, caractérisation (codimension un, ou encore $\dim H = \dim E - 1$), équation, l'intersection de m hyperplans est de dimension $\geq \dim E - m$

Chapitre 29 : Matrices et applications linéaires

- Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs selon une base, notations $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_1, \cdots, c_m)$
- Matrice d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ selon des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, notation ${\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}}^{\mathcal{B}_E}(u)$; cas particulier d'un endomorphisme, notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$
- L'application $u \mapsto {\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}}^{\mathcal{B}_E}(u)$ est un isomorphisme d'e.v. Expressions des matrices de $u(x)$, de $\alpha u + \beta v$, de $v \circ u$, de u^{-1}
- Morphisme canoniquement associé à une matrice, noyau / image / rang d'une matrice, notations $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{rg} A$
- Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi son noyau vaut $\{0\}$ ssi son image est $\mathbb{K}^n$ ssi son rang est n
- Pour un système linéaire $(\mathcal{S}) : AX = B$ avec comme système homogène $(\mathcal{S}_0) : AX = 0$:
  - Les solutions de $(\mathcal{S}_0)$ est l'ensemble $\operatorname{Ker} A$ (lien avec l'unicité d'une solution de $(\mathcal{S})$)
  - Le système $(\mathcal{S})$ est compatible ssi $B \in \operatorname{Im} A$
  - Si X_{part} est une solution de $(\mathcal{S})$, l'ensemble des solutions est $X_{part} + \operatorname{Ker} A$
  - Système de Cramer : existence et unicité d'une solution

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **25 à 27**. *Des exemples de questions figurent en page suivante*

Question fixée (cf page suivante).

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Soit E, F deux e.v., $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner une caractérisation de "u est injective" en fonction de la famille $u(\mathcal{B})$. Que peut-on dire si de plus E, F sont de même dimensions finies ? Chapitre 27, Théorème 27.20 et Théorème 27.24 (sans la partie "surjectivité")
2. Soit E, F deux e.v., $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner une caractérisation de "u est surjective" en fonction de la famille $u(\mathcal{B})$. Que peut-on dire si de plus E, F sont de même dimensions finies ? Chapitre 27, Théorème 27.20 et Théorème 27.24 (sans la partie "injectivité")
3. Caractérisation d'un projecteur : pour le sens réciproque, on montrera seulement que $\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = E$ sans montrer que p est bien un projecteur Chapitre 28, Propriété 28.5
4. Définition d'une forme linéaire, dimension de E^*, et construction d'une base duale Chapitre 28, Définition 28.11, Propriété 28.12, Définition 28.13 et Propriété 28.14

Exemples de questions libres :

Chapitre 25 :

- Compléter la définition suivante : $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. si $(E, +)$ est un groupe abélien et si les assertions suivantes sont vérifiées : ...
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $X \subset E$. Donner la définition en termes d'ensemble de $\operatorname{Vect}(X)$.
- Que peut-on dire d'une sur-famille ou d'une sous-famille pour une famille génératrice ? Pour une famille liée ? Pour une famille libre ?
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Si on a $u \in F \oplus G$, que peut-on en déduire sur u ?
- Soit I un ensemble quelconque et $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$. Que signifie l'assertion "$(\lambda_i)_{i \in I}$ est presque nulle" ?

Chapitre 26 :

- Donner une base de l'e.v. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Quelle est sa dimension ?
- Si E est un e.v. de dimension n, que peut-on dire sur les cardinaux de ses familles libres et génératrices ? (On attend 4 propriétés)
- Soit E un e.v. de dimension finie et F un s.e.v. de E. Que peut-on dire sur les dimensions de F et de E ?
- Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Que doit vérifier une base pour être une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$? Comment obtenir une telle base ?
- Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Donner 3 caractérisations de $F \oplus G = E$.

Chapitre 27 :

- Donner la définition d'une application linéaire.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition ensembliste de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.
- Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ une application linéaire qui vérifie $u(1) = 3X$, $u(X) = 4X^2$ et $u(X^2) = 5$. Pourquoi est-ce que cela suffit à déterminer complètement u ? Exprimer $u(P)$ pour un polynôme quelconque $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
- Donner la définition du rang d'une famille finie de vecteurs et d'une application linéaire.
- Énoncer le théorème du rang.